J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 8, No.2, 86-91, Januari 2012
ISBN:1858-1382

Ruang Norm-n dan Ruang Hasil Kali Dalam-n

Muh. Nur*

Abstrak

Pada tulisan ini, akan dipelajari ruang norm-n dan ruang hasil kali dalam-n. Setelah itu, menunjukkan bahwa setiap ruang hasil kali dalam-n merupakan ruang norm-n tetapi sebaliknya tidak berlaku. Dengan menggunakan Hukum jajaran genjang dapat diperiksa bahwa suatu suatu norm-n dapat di induksi atau tidak dari hasil kali dalam-n. Lebih jauh, mengkonstruksi hasil kali dalam-n yang bersesuaian digunakan Hukum Polarisasi. Terakhir, ditunjukkan kekonvergenan pada norm-n mengakibatkan kekonvergenan pada hasil kali dalam-n.

Kata Kunci: Ruang norm-n, ruang hasil kali dalam-n, Hukum Polarisasi.

Abstract

In this article, we will study an n-normed space and an n-inner product space. We then show that every the n-normed space is the n-inner product space but otherwise does not hold. Using the parallelogram law it can be checked that an n-norm can be induced or not from the n-inner product. Moreover, constructing the n-inner product corresponds with the Polarization Law. In adittion, it is shown that the convergence the n-norm implies the n-inner product.

Keywords: n-Normed space, n-inner product space, Polarization Law.

1. Pendahuluan

Pada setiap ruang hasil kali dalam $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ dapat didefinisikan suatu norm vektor (dinotasikan $\|\cdot\|$, $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$) yakni $\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{\frac{1}{2}}$. Norm vektor merupakan perumuman dari konsep panjang vektor yang telah dikenal. Dengan pendefinisian norm seperti di atas, dapat dikatakan bahwa setiap ruang hasil kali dalam merupakan ruang norm, dengan norm yang di induksi dari hasil kali dalamnya. Namun secara umum, ruang norm bukanlah ruang hasil kali dalam. Untuk lebih jelasnya lihat [6].

Konsep tentang ruang norm-2 pertama kali dikembangkan oleh Gähler [1] pada pertengahan tahun 1960-an dan ruang hasil kali dalam-2 pertama kali diperkenalkan oleh Diminnie, Gähler dan White [2] pada tahun 1970. Sementara perumuman untuk ruang norm-n dikembangkan oleh Gähler di akhir dekade 1960-an dan ruang hasil kali dalam- n dikembangkan oleh Misiak [5] di tahun 1989.

Dalam tulisan ini pertama akan didefinisikan ruang norm-n dan ruang hasil kali dalam-n lalu menunjukkan setiap ruang hasil kali dalam-n merupakan ruang norm-n namun tidak sebaliknya. Lebih jauh lagi kita dapat memeriksa suatu norm-n dapat di induksi dari hasil kali dalam-n atau tidak dengan menggunakan Hukum jajaran genjang. Apabila norm-n yang didefinisikan memenuhi kesamaan jajaran genjang, berarti norm-n tersebut dapat di induksi dari

* *Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10 Makassar*

hasil kali dalam-n. Untuk mengkonstruksi hasil kali dalam-n yang bersesuaian dapat digunakan kesamaan Polarisasi. Terakhir akan disinggung sedikit mengenai kekonvergenan pada ruang norm-n dan hasil kali dalam-n.

2. Pembahasan

2.1. Ruang Norm-n

Misalkan X adalah ruang vektor real berdimensi d dimana $d \geq n$. Suatu fungsi bernilai real yang didefinisikan sebagai suatu pemetaan $\|\cdot,\cdots,\|: X \times \cdots \times X \to \mathbb{R}$, sehingga untuk setiap $x_1, x_2, \cdots, x_n, y, z \in X$ memenuhi sifat dibawah ini:

1. $\|x_1,\cdots,x_n\| = 0$ jika dan hanya jika $x_1,\cdots,x_n$ bergantung linear;
2. $\|x_1,\cdots,x_n\| = \|x_{i_1},\cdots,x_{i_n}\|$, untuk setiap permutasi $(i_1,\cdots,i_n)$ dari $(1,\cdots,n)$;
3. $\|x_1,\cdots,x_{n-1},\alpha x_n\| = |\alpha|\|x_1,\cdots,x_{n-1},x_n\|$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. $\|x_1,\cdots,x_{n-1},y+z\| \leq \|x_1,\cdots,x_{n-1},y\| + \|x_1,\cdots,x_{n-1},z\|$, disebut sebagai norm-$n$ di X.

Pasangan $(X,\|\cdot,\cdots,\|)$ disebut suatu ruang norm-n.

Sebagai contoh X adalah ruang vektor real berdimensi d dimana $d \geq n$. Definisikan fungsi $\|\cdot,\cdots,\cdot\|$ di X sebagai berikut:

$$\|x_1,\cdots,x_n\| = \left[det\begin{pmatrix}\langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \langle x_1,x_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n,x_1\rangle & \cdots & \langle x_n,x_n\rangle\end{pmatrix}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

merupakan norm-n pada X (lihat [4]). Secara geometris, jika dipilih $n = 1$ diperoleh $\|x_1\| = \langle x_1,x_1\rangle^{\frac{1}{2}}$ merupakan panjang vektor X. Untuk $n = 2$ diperoleh $\|x_{1,}x_1\| = \{\|x_1\|^2\|x_2\|^2 - \langle x_1,x_1\rangle^2\}^{\frac{1}{2}}$ yang mempresentasikan luas jajaran genjang yang direntang oleh x_1 dan x_2 di X. Dengan demikian secara umum $\|x_1,\cdots,x_n\|$ mempresenatisikan 'volume' paralelpedium yang direntang oleh $x_1,\cdots,x_n$. Dengan menggunakan sifat 1-4 dari definisi norm-n di atas serta

$$\|x_1,\cdots,x_{n-1},x_n\| = \left\|x_1,\cdots,x_{n-1},\left(x_n + \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i\right) - \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i\right\| \tag{2}$$

maka perhatikan proposisi berikut.

Proposisi 1.
Jika $(X,\|\cdot,\cdots,\|)$ adalah ruang norm-n maka

1. $\|x_1,\cdots,x_n\| \geq 0$ *untuk setiap* $x_1,\cdots,x_n \in X$
2. $\|x_1,\cdots,x_{n-1},x_n\| = \|x_1,\cdots,x_{n-1},x_n + \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i\|$ *untuk setiap* $x_1,\cdots,x_n \in X$ *dan* $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$.

2.2 Ruang Hasil Kali Dalam-n

Misalkan X adalah ruang vektor berdimensi d dimana $d \geq n$. Suatu fungsi bernilai real $\langle\cdot,\cdot\mid\cdot,\cdots,\cdot\rangle$ di X^{n+1} sehingga untuk setiap $x_1,x_2,\cdots,x_n,y,z \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ memenuhi sifat-sifat dibawah ini:

1. $\langle x_1, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle \geq 0$; $\langle x_1, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle = 0$ jika dan hanya jika $x_1, x_2, \cdots, x_n$ bergantung linear;
2. $\langle x_{i_1}, x_{i_1} | x_{i_2}, \cdots, x_{i_n} \rangle = \langle x_1, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle$ untuk setiap permutasi $(i_1, \cdots, i_n)$ dari $1, \cdots, n$);
3. $\langle y, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle = \langle x_1, y | x_2, \cdots, x_n \rangle$;
4. $\langle \alpha y, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle = \alpha \langle x_1, y | x_2, \cdots, x_n \rangle$;
5. $\langle y + z, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle = \langle y, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle + \langle z, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle$, disebut sebagai ruang hasil kali dalam-n di X.

Pasangan $(X, \langle \cdot, \cdot \mid \cdot, \cdots, \cdot \rangle)$ disebut ruang hasil kali dalam-n.

Proposisi 2. (*Ketaksamaan Cauchy-Schwarz*)
Jika $(X, \langle \cdot, \cdot \mid \cdot, \cdots, \cdot \rangle)$ *merupakan ruang hasil kali dalam-*n*, maka*

$$|\langle x_0, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle| \leq \langle x_0, x_0 | x_2, \cdots, x_n \rangle^{\frac{1}{2}} \langle x_1, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle^{\frac{1}{2}} \qquad (3)$$

Bukti:
Ambil sebarang $x_0, x_2, \cdots, x_n \in X$. Maka untuk setiap $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \lambda x_0 + x_1, \lambda x_0 + x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle \\ &\leq \lambda^2 \langle x_0, x_0 | x_2, \cdots, x_n \rangle + 2\lambda \langle x_0, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle + \langle x_1, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle \\ &= p(\lambda). \end{aligned}$$

Untuk itu, diskriminan $p(\lambda)$ haruslah tak positif. Akibatnya

$$4\langle x_0, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle^2 - 4\langle x_0, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle \langle x_1, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle \leq 0.$$

Akibatnya $|\langle x_0, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle| \leq \langle x_0, x_0 | x_2, \cdots, x_n \rangle^{\frac{1}{2}} \langle x_1, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle^{\frac{1}{2}}$. ■

Dengan menggunakan sifat-sifat pada definisi ruang hasil kali dalam-n $(X, \langle \cdot, \cdot \mid \cdot, \cdots, \cdot \rangle)$ dan ketaksamaan Cauchy-Schwarz diperoleh

$$\|x_1, \cdots, x_n\| := \langle x_1, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle^{\frac{1}{2}} \qquad (4)$$

adalah norm-n pada X.

Proposisi 3.
Jika suatu norm-n diperoleh dari hasil kali dalam-n maka untuk setiap $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ berlaku hukum jajaran genjang, yakni $\|x_0 + x_1, x_2, \cdots, x_n\|^2 + \|x_0 - x_1, x_2, \cdots, x_n\|^2 = 2(\|x_0, x_2, \cdots, x_n\|^2 + \|x_1, x_2, \cdots, x_n\|^2)$ *dan kesamaan Polarisasi yakni*

$$\langle x_1, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle = \frac{1}{4}(\|x_0 + x_1, x_2, \cdots, x_n\|^2 - \|x_0 - x_1, x_2, \cdots, x_n\|^2) \qquad (5)$$

Bukti:
Diketahui bahwa $\|x_0 + x_1, x_2, \cdots, x_n\|^2 = \langle x_0 + x_1, x_0 + x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle$ dan $\|x_0 - x_1, x_2, \cdots, x_n\|^2 = \langle x_0 - x_1, x_0 - x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle$. Dengan menjumlahkan dan mengurangkan diperoleh kesamaan yang diinginkan. ■

Teorema 1.
Jika $(X, \langle \cdot, \cdot \mid \cdot, \cdots, \cdot \rangle)$ *adalah ruang norm-*n *dan* $\|\cdot, \cdots, \|$ *memenuhi hukum jajaran genjang maka*

$$[x_0, x_1 | x_2, \cdots, x_n] = \frac{1}{4}(\|x_0 + x_1, x_2, \cdots, x_n\|^2 - \|x_0 - x_1, x_2, \cdots, x_n\|^2) \qquad (6)$$

merupakan hasil kali dalam-n *pada* X.

Bukti:
Untuk sifat 1a, 1b, 2 dan 3 langsung dari definisi norm-n. Sekarang tinggal ditunjukkan sifat 4 dan 5. Dari hukum jajaran genjang diperoleh

$$\|u+v+x_1,x_2,\cdots,x_n\|^2 + \|u+v-x_1,x_2,\cdots,x_n\|^2 = 2(\|u+v,x_2,\cdots,x_n\|^2 + \|x_1,x_2,\cdots,x_n\|^2).$$

Dengan mengganti nilai v dengan nilai $-v$ setelah itu, kedua persamaan dikurangkan lalu menggunakan persamaan

$$4[x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n] = \|x_0+x_1,x_2,\cdots,x_n\|^2 - \|x_0-x_1,x_2,\cdots,x_n\|^2$$

maka diperoleh

$$[u+x_1,v|x_2,\cdots,x_n] + [u-x_1,v|x_2,\cdots,x_n] = 2\,[u,v|x_2,\cdots,x_n]. \qquad (7)$$

Misalkan $u = x_1$ diperoleh $[2u,v|x_2,\cdots,x_n] = 2\,[u,v|x_2,\cdots,x_n]$. Akibatnya Persamaan (7) menjadi

$$[u+x_1,v|x_2,\cdots,x_n] + [u-x_1,v|x_2,\cdots,x_n] = [2u,v|x_2,\cdots,x_n]. \qquad (8)$$

Misalkan $u + x_1 = x$ dan $-x_1 = x'$, maka Persamaan (8) menjadi

$$[x,v|x_2,\cdots,x_n] + [x',v|x_2,\cdots,x_n] = [2u,v|x_2,\cdots,x_n]. \qquad (9)$$

Untuk membuktikan sifat terakhir dibagi menjadi 3 kasus yakni

- Dengan menggunakan induksi matematika dan Persamaan (9) diperoleh $[\alpha x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n] = \alpha[x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n]$ untuk sebarang $\alpha \in \mathbb{Z}^+$.
  Untuk $\alpha = 0$ diperoleh $[0x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n] = 0[x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n]$.
  Untuk $\alpha = -m$ dimana $m \in \mathbb{Z}^+$ diperoleh $[(-m)x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n] = m[-x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n]$ sehingga

$$[-x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n] = \frac{1}{4}(\|-x_0+x_1,x_2,\cdots,x_n\|^2 - \|-x_0-x_1,x_2,\cdots,x_n\|^2)$$

$$= \frac{1}{4}(\|x_0-x_1,x_2,\cdots,x_n\|^2 - \|x_0+x_1,x_2,\cdots,x_n\|^2)$$

$$= -\frac{1}{4}(\|x_0+x_1,x_2,\cdots,x_n\|^2 - \|x_0-x_1,x_2,\cdots,x_n\|^2)$$

$$= -[x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n]$$

  Jadi $[(-m)x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n] = -m[x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n]$ dimana m$\in \mathbb{Z}^+$

- Untuk sebarang $\alpha = \frac{p}{q}$ dimana $p,q \in \mathbb{Z}$ dan $q \neq 0$ diperoleh
  $\frac{p}{q}[x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n] = \frac{p}{q}\left[\frac{q}{q}x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n\right] = \frac{p}{q}\left[\frac{1}{q}x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n\right] = \left[\frac{p}{q}x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n\right]$
- Untuk sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$. Misalkan $(\alpha(k))$ adalah barisan bilangan rasional yang konvergen ke $\alpha \in \mathbb{R}$. Akibatnya $0 = [0x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n] = [\lim_{k\to\infty}(\alpha(k) - \alpha)\,x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n]$. Dengan menggunakan kekontinuan norm-n diperoleh

$$\left[\lim_{k\to\infty}(\alpha(k)-\alpha)\,x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n\right]=\ \frac{1}{4}\left\|\lim_{k\to\infty}(\alpha(k)-\alpha)\,x_0+x_1,x_2,\cdots,x_n\right\|^2$$

$$-\tfrac{1}{4}\|\lim_{k\to\infty}(\alpha(k)-\alpha)\,x_0-x_1,x_2,\cdots,x_n\|^2$$

$$0=\lim_{k\to\infty}\tfrac{1}{4}(\|(\alpha(k)-\alpha)x_0+x_1,x_2,\cdots,x_n\|-\|(\alpha(k)-\alpha)x_0-x_1,x_2,\cdots,x_n\|^2)^2 = \lim_{k\to\infty}[(\alpha(k)-\alpha)x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n]$$

Dengan kata lain $\lim_{k\to\infty}[\alpha(k)x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n]=[\alpha x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n]$.
Akibatnya

$$[\alpha x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n]=\lim_{k\to\infty}[\alpha(k)x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n]=\lim_{k\to\infty}\alpha(k)[x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n]$$
$$=\alpha[x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n]\quad \text{untuk setiap } \alpha\in\mathbb{R}.$$

Jadi $[x_0,x_1|x_2,\cdots,x_n]$ merupakan hasil kali dalam- n.■

1.3 Kekonvergenan di Ruang Norm-n dan Ruang Hasil Kali Dalam- n

Barisan $(x(k))$ di ruang norm- n $(X,\|\cdot,\cdots,\|)$ dikatakan konvergen ke $x\in X$ apabila untuk setiap $x_2,\cdots,x_n\in X$, $\lim_{k\to\infty}\|x(k)-x,x_2,\cdots,x_n\|=0$. Dengan kata lain vector x disebut limit barisan $(x(k))$ apabila untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $n_0\in\mathbb{N}$ sehingga $\|x(k)-x,x_2,\cdots,x_n\|<\varepsilon$ untuk setiap $k\geq n_0$, dikasus ini dituliskan $x(k)\to x$. Misalkan $(X,\langle\cdot,\cdot\mid\cdot,\cdots,\cdot\rangle)$ ruang hasil kali dalam-n dan $\|x_1,\cdots,x_n\|:=\langle x_1,x_1|x_2,\cdots,x_n\rangle^{\frac{1}{2}}$ adalah norm-n yang di induksi dari hasil kali dalam-n. Barisan $(x(k))$ dikatakan konvergen secara lemah ke $x\in X$ (dalam hasil kali dalam-n) apabila untuk setiap $x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$, $\langle x(k)-x,x_1|x_2,\cdots,x_n\rangle\to 0$ bila $k\to\infty$.

Teorema 2.
Misalkan $(X,\|\cdot,\cdots,\|)$ adalah ruang norm-n maka limit dari suatu barisan yang konvergen adalah tunggal.

Bukti:
Andaikan x dan x' adalah limit dari $(x(k))$ dimana $x\neq x'$. Untuk setiap $x_2,\cdots,x_n\in X$, untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $n_0\in\mathbb{N}$ sehingga $\|x(k)-x,x_2,\cdots,x_n\|<\varepsilon$ dan $\|x(k)-x',x_2,\cdots,x_n\|<\varepsilon$ untuk setiap $k\geq n_0$. Pilih $\varepsilon=\frac{1}{2}\|x-x',x_2,\cdots,x_n\|$ dimana $x_2,\cdots,x_n,x-x'$ bebas linear. Dengan menggunakan sifat norm-n yang ke-4 diperoleh

$$\|x-x',x_2,\cdots,x_n\|=\left\|\left(x(k)-x'\right)+(x-x(k)),x_2,\cdots,x_n\right\|$$
$$\leq\|x(k)-x',x_2,\cdots,x_n\|+\|x(k)-x,x_2,\cdots,x_n\|$$
$$<\|x-x',x_2,\cdots,x_n\| \text{ untuk setiap } k\geq n_0.$$

Ini mustahil terjadi akibatnya $x=x'$. ■

Proposisi 4.
Misalkan $(X,\langle\cdot,\cdot\mid\cdot,\cdots,\cdot\rangle)$ ruang hasil kali dalam-n. Jika $(x(k))$ konvergen secara lemah ke-x dan x' maka $x=x'$.

Bukti:
Andaikan $x \neq x'$. Dari hipotesis diperoleh $\langle x(k), x_1|x_2, \cdots, x_n\rangle \to \langle x, x_1|x_2, \cdots, x_n\rangle$ dan $\langle x(k), x_1|x_2, \cdots, x_n\rangle \to \langle x', x_1|x_2, \cdots, x_n\rangle$ bila $k \to \infty$ untuk setiap $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$. Karena limit barisan bilangan real adalah tunggal sehingga untuk setiap $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$, $\langle x - x', x_1|x_2, \cdots, x_n\rangle = 0$. Kontradiksi dengan Sifat $(1b)$ norm- n, sehingga $x = x'$.

Dengan menggunakan ketaksamaan Cauchy-Schwarz diperoleh $|\langle x(k) - x, x_1|x_2, \cdots, x_n\rangle| \leq \|x(k) - x, x_2, \cdots, x_n\| \|x_1, x_2, \cdots, x_n\|$. Untuk itu perhatikan proposisi berikut.

Proposisi 5.
Jika $(x(k))$ konvergen ke-$x \in X$ dalam norm- n maka $(x(k))$ konvergen secara lemah ke-$x \in X$.

Kebalikan dari proposisi di atas tidak berlaku. Lebih jauh lihat [3].

2. Kesimpulan

Setiap ruang hasil kali dalam-n merupakan ruang norm-n. Namun secara umum, ruang norm-n bukanlah ruang hasil kali dalam-n. Dengan hukum jajaran genjang dapat diketahui apakah suatu ruang norm-n juga merupakan ruang hasil kali dalam-n atau tidak. Dengan demikian konsep atau sifat yang berlaku pada ruang hasil kali dalam-n belum tentu berlaku pada ruang norm-n. Kekonvergenan pada norm-n mengakibatkan kekonvergenan pada hasil kali dalam-n, tetapi sebaliknya tidak berlaku.

Daftar Pustaka

[1] Gähler S., 1965. Lineare 2-Normierte Rume. *Math. Nachr*., 28, 1-43.

[2] Diminnie C., Gähler S. and White A., 1973. 2-inner Product Spaces. *Demonstratio. Math*. 6, 525-536.

[3] Gunawan H., 2002. On convergence in n-Inner product spaces. *Bull. Malaysian Math. Sci. Soc*.

[4] Gunawan H. dan Mashadi M., 2001. On n-Normed Spaces. *Int. J. Math. Sci*. 27, 321-329.